

ΜΕΡΙΚΕΣ ΣΚΕΨΕΙΣ ΓΙΑ ΤΗ ΔΙΔΑΣΚΑΛΙΑ ΤΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ

(Ομιλία για την τελετή της απονομής
του βραβείου Ξανθόπουλου-Πνευματικού, 1-12-2000)

Εξοχώτατε Κύριε Πρόεδρε της Ελληνικής Δημοκρατίας,
Κύριοι Υπουργοί,
Σεβασμιώτατε,
Κυρίες και Κύριοι:

Θα ήθελα να ευχαριστήσω θερμά την Επιτροπή για την εξαιρετική τιμή που μου έκανε επιλέγοντάς με για το βραβείο στη μνήμη Βασίλη Ξανθόπουλου και Στέφανου Πνευματικού. Ευχαριστώ επίσης και τον αγαπητό συνάδελφο Γιώργο Δάσιο για τα καλά του λόγια. Αισθάνομαι ότι το βραβείο και οι έπαινοι είναι κάπως αναντίστοιχα με τα λίγα που έχω κάνει, και που δεν ξεπερνούν τις υποχρεώσεις και τα καθήκοντα ενός πανεπιστημιακού δασκάλου. Εδώ, βέβαια, ο νους όλων μας πάει στον Βασίλη Ξανθόπουλο και τον Στέφανο Πνευματικό που έδωσαν τη ζωή τους την ίδια, υπηρετώντας αυτήν την υπόθεση.

Είχα την ξεχωριστή τύχη να εργασθώ μαζί τους στο Πανεπιστήμιο Κρήτης για αρκετά χρόνια και να τους γνωρίσω καλά και τους δύο. Η οδύνη για το θάνατό τους σιγά-σιγά αντικαταστάθηκε μέσα μου από μια περίεργη σιγουριά ότι εξακολουθούν να είναι παρόντες, κάπου εκεί, στα αμφιθέατρα και τους υπολογιστές, στο Πανεπιστήμιο ή στο Ερευνητικό Κέντρο. Πολλές φορές πιάνω τον εαυτό μου ν' αναρωτιέται τί θα έλεγε ο Βασίλης για τις τάδε εξισώσεις ή να σκέφτομαι ότι θα πρέπει να ρωτήσω το Στέφανο τι νομίζει για τις εργασίες του τάδε υποψηφίου...

Θα ήθελα να σας μιλήσω απόψε για τη διδασκαλία των μαθηματικών. Φυσιολογικά, θα έχω περισσότερα πράγματα να πω για την εκπαίδευση των φοιτητών στο πανεπιστήμιο. Για τη διδασκαλία των μαθηματικών στη δευτεροβάθμια εκπαίδευση θα έχω λιγότερα να πω.

Η πρώτη μου εμπειρία διδασκαλίας μαθήματος σε πανεπιστήμιο ήταν πριν πολλά χρόνια, όταν ήμουν μεταπτυχιακός φοιτητής στην Αμερική. Ένα πρωί, με φώναξε ο καθηγητής μου στο γραφείο του, στο οποίο είχα περάσει πολλές, καθόλου ευχάριστες ώρες, ακούγοντας τα σχόλιά του για τις αδυναμίες της δουλειάς μου που από τότε ήταν,

δυστυχώς, πολλές. Εκείνο όμως το πρωί μου είπε ότι θα έφευγε για λίγες μέρες και ότι θα ήθελε να τον αντικαταστήσω και να κάνω το μάθημά του. «Έχω μια πολύ καλή τάξη», μου είπε, «τα παιδιά είναι ιδιαιτέρως έξυπνα, δεν θα έχεις κανένα πρόβλημα». Τον ρώτησα αν είχε να μου δώσει τίποτε συμβουλές για την από έδρας διδασκαλία. Μου είπε: «Ασφαλώς. Υπάρχουν τρεις βασικές αρχές της διδασκαλίας των μαθηματικών, και είναι καιρός, πια, να τις μάθεις και συ.

Πρώτον: Αρχίζουμε να γράφουμε από την πάνω αριστερά γωνία του πίνακα.

Δεύτερον: Δεν προσερχόμαστε ποτέ στην τάξη υπό την επήρεια οινόπνευματος.

Τρίτον: Απαγορεύεται να συνάπτουμε «ιδιαιτέρες» σχέσεις με τις φοιτήτριές μας».

Από τότε ξανάκουσα τις ίδιες «συμβουλές» σε διάφορες παραλλαγές. Προφανώς, ανήκουν στα λεγόμενα «ανέκδοτα» ή «απόκρυφα» του επαγγέλματος. Υποθέτω ότι το νόημά τους είναι πρώτα- πρώτα ότι η διδασκαλία των μαθηματικών είναι κάτι το πολύ απλό και έρχεται φυσιολογικά (αρκεί ν' αρχίζουμε να γράφουμε από την πάνω αριστερή γωνία του πίνακα). Πραγματικά, θα έλεγε κανείς, εκ πρώτης όψεως, ότι τα μαθηματικά είναι εύκολο να διδαχθούν. Στα μαθηματικά τα πράγματα είναι εγγενώς σαφή, πολλές φορές εξ ορισμού μονοσήμαντα, και προσφέρονται ιδιαίτερα για μια λογική ανάπτυξη των επιχειρημάτων. Σε οδηγούν από μόνα τους. Σ' αυτό ίσως οφείλεται ότι η επιστήμη αυτή έχει μακρά παράδοση σαφούς και κατανοητής διδασκαλίας, και ότι πολλοί από μας έχουμε τις καλύτερες αναμνήσεις από τους δασκάλους μας στα μαθηματικά στο Γυμνάσιο, το Λύκειο, στα φροντιστήρια ή στο Πανεπιστήμιο, (όσοι βέβαια από μας δεν είχαν φοβηθεί ή μισήσει τα μαθηματικά).

Το δεύτερο, που ίσως υπονοούσαν οι τρεις συμβουλές του καθηγητή μου, είναι ότι για ένα μαθηματικό στο Πανεπιστήμιο το σπουδαιότερο δεν είναι η διδασκαλία, αλλά η σπουδή των μαθηματικών, η έρευνα. Αυτή μετράει την αξία μας ως μαθηματικών, αυτή κυρίως βαρύνει στις κρίσεις μας για προαγωγή. Η διδασκαλία; Κάτι το δευτερεύον, κάτι που είμαστε αναγκασμένοι να κάνουμε και που πρέπει να μας παίρνει όσο λιγότερο χρόνο γίνεται. Σε ακραία μορφή εξέφρασε αυτή την άποψη ο G.H. Hardy, μεγάλος Άγγλος μαθηματικός του πρώτου μισού του αιώνα που πέρασε. Γράφει πόσο τυχερός ήταν στη ζωή του που ευτυχώς

«ήμουν υποχρεωμένος ν' ασχοληθώ πολύ λίγο με την πληκτική πλευρά της ρουτίνας των πανεπιστημίων. Μισώ την διδασκαλία και δεν είχα ποτέ πολλά διδακτικά καθήκοντα. Το είδος της διδασκαλίας που έκανα ήταν σχεδόν αποκλειστικά εποπτεία έρευνας. Μου αρέσει βέβαια να δίνω διαλέξεις, και το έκανα σε εξαιρετικά ικανές τάξεις. Είχα όμως πάντοτε άφθονο χρόνο για την έρευνα, που ήταν η μεγαλύτερη από τις μόνιμες χαρές της ζωής μου».

Ασφαλώς η σπουδή και η έρευνα των μαθηματικών έχει πρωταρχική σημασία, και «χαρίζει μεγάλη ευτυχία», όπως καλά ξέρουμε όλοι οι μαθηματικοί. Πρέπει στη ζωή μας ν' αποδείξουμε οι ίδιοι νέα θεωρήματα και να καθοδηγήσουμε τους υποψήφιους διδάκτορές μας να προσθέσουν και αυτοί νέα γνώση στα μαθηματικά. Αλλά, βέβαια, είναι εξ ίσου νομίζω σημαντική και η διδασκαλία, που είναι και το θέμα μας απόψε. Ασφαλώς όμως ο δάσκαλος πρέπει να μελετά και να ερευνά, δηλαδή να ξέρει. Να ξέρει πολύ περισσότερο απ' όσα θα διδάξει. Αν περιοριστείς μόνο σ' ό,τι γράφει το βιβλίο ή είσαι ένα κεφάλαιο μπροστά από τους μαθητές σου, είναι αδύνατο να τους βοηθήσεις να καταλάβουν τα μαθηματικά, να δώσεις προοπτική και μια γενικότερη τοποθέτηση και αίσθηση του θέματος. Γρήγορα εξ άλλου θα το καταλάβουν και οι μαθητές σου...

Στη χώρα μας υπάρχει μακρά παράδοση εκτίμησης των μαθηματικών, ιδίως των θεωρητικών. Ο κύριος λόγος είναι, βέβαια, η σημασία και η αίγλη των Αρχαίων Ελληνικών Μαθηματικών, αλλά και το γεγονός ότι μάλλον ρέπουμε προς τη θεωρία και τις αφηρημένες έννοιες. Εν πάση περιπτώσει έχουμε οι περισσότεροι την εντύπωση ότι τα μαθηματικά είναι κάτι το σημαντικό, έστω και αν πολλές φορές δεν τα καταλαβαίνουμε.

Η παράδοση αυτή έχει διαμορφώσει τα μαθήματα, την ύλη, τον τρόπο διδασκαλίας, και τη δομή του προγράμματος σπουδών στα μαθηματικά στην τριτοβάθμια εκπαίδευση, κυρίως στα Τμήματα Μαθηματικών στα Πανεπιστήμια. Υπάρχουν εξαιρέσεις, όπως το Τμήμα του Πανεπιστημίου Κρήτης, αλλά γενικά θα έλεγα ότι το πρόγραμμα του Τμήματος Μαθηματικών του Πανεπιστημίου Αθηνών είναι κάπως τυπικό: Διδάσκουμε πολλά μαθήματα σ' όλους τους κλάδους των μαθηματικών, τα περισσότερα στα θεωρητικά μαθηματικά. Τα μαθήματα γίνονται σε υψηλό επίπεδο με έμφαση στην αυστηρότητα και στο μοντέλο θεώρημα-απόδειξη. Δίνουμε πολλές γνώσεις, η ύλη είναι

μεγάλη, τα υποχρεωτικά μαθήματα πολλά , και το όλο πρόγραμμα αρκετά βαρύ.

Το υψηλό επίπεδο της μαθηματικής παιδείας που παρέχεται φαίνεται π.χ. απ' το γεγονός ότι πολλοί απόφοιτοί μας έχουν διαπρέψει στο εξωτερικό στις μεταπτυχιακές τους σπουδές, και έχουν αναδειχθεί σε σπουδαίους, διεθνούς φήμης, μαθηματικούς. Υπάρχει εξ άλλου και το σοβαρό επιχείρημα ότι σ' ένα κόσμο που αλλάζει ραγδαία, και που οι αυριανές εφαρμογές των μαθηματικών δεν μπορούμε να φανταστούμε ποιες θα είναι και τι είδους μαθηματικά θα απαιτούν, η καλύτερη και δοκιμασμένη εκπαίδευση είναι η αυστηρή και κλασσική παιδεία, που δίνει έμφαση στα θεωρητικά μαθηματικά, το θεμέλιο των μαθηματικών επιστημών.

Αναμφίβολα τα επιχειρήματα αυτά είναι ισχυρά και θα πρέπει η ευνοϊκή παράδοση για τα μαθηματικά να διαφυλαχθεί, και να διατηρηθεί η δυνατότητα να μπορεί να διαλέγει ο φοιτητής μια αυστηρή-κλασσική παιδεία. Θα πρέπει όμως να στρέψουμε την προσοχή μας και σε άλλα προβλήματα που τα τελευταία χρόνια γίνονται όλο και πιο πιεστικά :

α) Το πρώτο πρόβλημα που αντιμετωπίζουμε είναι ότι πολύ λίγοι απ' τους φοιτητές μας ήθελαν πράγματι να σπουδάσουν μαθηματικά. Φαίνεται ότι τα Μαθηματικά είναι στις πρώτες προτιμήσεις, στις εισαγωγικές εξετάσεις, ενός μικρού μόνο ποσοστού των πρωτοετών μας φοιτητών. Αυτό οφείλεται ασφαλώς στην εντύπωση που επικρατεί ότι η μόνη επαγγελματική διέξοδος για τους αποφοίτους μας είναι η δευτεροβάθμια εκπαίδευση – ήδη κορεσμένη –, τα φροντιστήρια και τα ιδιαίτερα, καθώς επίσης και στο ότι οι σπουδές στα μαθηματικά θεωρούνται δύσκολες. (Επί τη ευκαιρία, οι εκτιμήσεις από μία έρευνα, που κάναμε σ' ένα πρόγραμμα ΕΠΕΑΕΚ μαζί με τα Πανεπιστήμια Κρήτης και Ιωαννίνων, δείχνουν ότι περί το 60% των αποφοίτων μας – με καθοδική τάση για τους πιο πρόσφατους – απασχολούνται στην εκπαίδευση).

β) Υπάρχει βέβαια σήμερα παγκοσμίως μια έντονη τάση μαζικοποίησης των σπουδών, καθώς διαρκώς μεγαλώνει το ποσοστό των παιδιών που θέλουν να παρακολουθήσουν κάποιου είδους τριτοβάθμια εκπαίδευση. Το φαινόμενο αυτό είναι, ως γνωστόν, πολύ έντονο στη χώρα μας. Δεν είναι υπερβολή να πει κανείς ότι ό,τι ήταν παλιότερα στο μυαλό του μέσου ανθρώπου το Λύκειο είναι σήμερα το Πανεπιστήμιο, και ό,τι ήταν το Πανεπιστήμιο γρήγορα αντικαθίσταται από τις μεταπτυχιακές σπουδές. Μέσα σ' αυτές τις συνθήκες, των μεγάλων

αριθμών φοιτητών, πρέπει ασφαλώς να ξανασκεφτούμε τους σκοπούς του προγράμματος σπουδών και τι είδους εκπαίδευση παρέχουμε. Οι συνθήκες είναι δυσμενείς καθώς η υποδομή μας σε προσωπικό, αίθουσες, εργαστήρια, υπολογιστές, βιβλιοθήκες δεν έχει συμβαδίσει με την αύξηση των εισακτέων. Στα τελευταία πέντε χρόνια είχαμε π.χ. στο τμήμα μας αύξηση του αριθμού των εισακτέων κατά 50%, ενώ ο αριθμός των διδασκόντων παρέμεινε, πρακτικά, σταθερός.

γ) Αυτοί οι παράγοντες και το γεγονός ότι το πρόγραμμα σπουδών είναι πολύ απαιτητικό έχουν αυξήσει το ποσοστό των φοιτητών που δυσκολεύονται να πάρουν το πτυχίο τους. Υπάρχει αδιαφορία για τις σπουδές, μεγάλα ποσοστά αποτυχίας στις εξετάσεις, μάλλον μικρά ποσοστά παρακολούθησης, ενώ η μέση διάρκεια των σπουδών είναι πια 6 χρόνια, στο τμήμα μου.

δ) Τέλος, ένα μεγάλο μέρος της διδακτικής μας προσπάθειας στρέφεται στη διδασκαλία των Μαθηματικών άλλων τμημάτων. Μερικές φορές υπάρχουν παράπονα από τα άλλα τμήματα ότι διδάσκουμε μαθηματικά όπως νομίζουμε εμείς (πολλή θεωρία, λίγες εφαρμογές), και δεν παίρνουμε υπ' όψιν τις πραγματικές ανάγκες των «πελατών» μας. Αυτό θα πρέπει να το προσέξουμε ιδιαίτερα, γιατί, στο μέλλον η διδασκαλία στα άλλα τμήματα θα γίνεται όλο και κεντρικότερη ασχολία μας.

Τι πρέπει να κάνουμε, τι έχουμε αρχίσει να κάνουμε για ν' αντιμετωπίσουμε αυτά τα προβλήματα;

1. Πρέπει πρώτα-πρώτα να κάνουμε τους φοιτητές μας να ενδιαφερθούν περισσότερο για τα μαθηματικά, και συγχρόνως να τα προβάλλουμε καλύτερα προς τα έξω. Η σημερινή ομιλία είναι χρυσή ευκαιρία γι' αυτόν το σκοπό. Ας μου επιτραπεί λοιπόν ένα διαφημιστικό διάλειμμα.

Χωρίς τα μαθηματικά, απλούστατα δεν είναι δυνατόν να κατανοήσουμε τον κόσμο γύρω μας. Και αν τα μαθηματικά είναι από χιλιάδες χρόνια ουσιώδες στοιχείο του ανθρώπινου πολιτισμού, τα τελευταία 50 χρόνια έχουν πολύ μεγάλη και άμεση, πια, επιρροή κατ' ευθείαν στην τεχνολογία, δηλ. όχι μόνο μέσω άλλων επιστημών. Η εποχή μας, εποχή της υψηλής τεχνολογίας, είναι η εποχή της μαθηματικής τεχνολογίας. Πίσω από κάθε επίτευγμα υψηλής τεχνολογίας κρύβονται προχωρημένα, καθόλου τετριμμένα, και συχνά πολύ θεωρητικά μαθηματικά:

- Ο υπολογιστής και η τεχνολογία των υπολογιστών δεν θα ήταν δυνατή χωρίς τις θεμελιώδεις ανακαλύψεις της μαθηματικής λογικής την δεκαετία του '30.
- Η έκρηξη στην ανάπτυξη των τηλεπικοινωνιών, από τις συμβατικές μορφές τους μέχρι το διαδίκτυο, το Internet, δεν θα ήταν δυνατή χωρίς τη μαθηματική δουλειά του Wiener, του Kolmogoroff, του Shannon, κ.ά. για την κωδικοποίηση, την αποστολή και την αποκωδικοποίηση μηνυμάτων, την επεξεργασία του σήματος με μεθόδους της ανάλυσης Fourier και της θεωρίας των πιθανοτήτων.
- Ο άνθρωπος δεν θα πήγαινε στο φεγγάρι χωρίς τη μαθηματική θεωρία του βελτίστου ελέγχου (π.χ. φίλτρο Kalman). Η θεωρία ελέγχου παίζει βέβαια κεντρικό ρόλο και στη βιομηχανία.
- Χωρίς την επιχειρησιακή έρευνα και τη βελτιστοποίηση, δεν θα ήταν δυνατό να γίνει ορθολογικός προγραμματισμός των οικονομικών δραστηριοτήτων και να ληφθούν κάθε είδους αποφάσεις στη διοίκηση των επιχειρήσεων. (Δεν αρκούν βέβαια μόνο τα μαθηματικά για να πάει καλά μια επιχείρηση...).
- Χωρίς την ανάπτυξη των διαφορικών εξισώσεων και της αριθμητικής ανάλυσης δεν θα ήταν δυνατό να σχεδιαστεί π.χ. ένα σύγχρονο αεροπλάνο, να υπολογισθούν η ροή του αέρα γύρω του και οι δυνάμεις που ασκούνται πάνω του.

Πέρα από τις εφαρμογές τους στην τεχνολογία, και τα ίδια τα μαθηματικά αναπτύχθηκαν ραγδαία τα τελευταία 50 χρόνια. Πολλά περίφημα ανοιχτά προβλήματα των θεωρητικών μαθηματικών λύθηκαν στις μέρες μας. Και τα μαθηματικά βέβαια ήταν το κλειδί για να υπάρξει μεγάλη πρόοδος όχι μόνο στην τεχνολογία αλλά και στις άλλες επιστήμες: Όχι μόνο πια στη Φυσική αλλά και στα Οικονομικά, την Ιατρική, την Πληροφορική, την Βιολογία, την Γεωφυσική. Ως γνωστόν, δεν υπάρχει βραβείο Νόμπελ Μαθηματικών. Αρκετά όμως από τα βραβεία Νόμπελ τα τελευταία 20 χρόνια δόθηκαν σε επιστήμονες για μαθηματική, στην ουσία, δουλειά. (Π.χ. στους Wilson και Chandrasekhar στη Φυσική και Αστροφυσική, Cormack στην Ιατρική-τομογραφία-, Debreu, Nash, και για τις εργασίες των Black, Sholes, και Merton στα Οικονομικά, κ.α.). Από το χρηματιστήριο και τα παράγωγα στη μελέτη της δυναμικής του μυαλού, από τον σχεδιασμό νέων υλικών στην φυσιολογία, από την γρήγορη διάγνωση στην σεισμολογία και τη μελέτη της ανάμιξης στους ωκεανούς και την ατμόσφαιρα, (για να καταλάβουμε π.χ. την τρύπα του όζοντος ή το φαινόμενο του θερμοκηπίου ή την μόλυνση του περιβάλλοντος), τα μαθηματικά

μοντέλα και τα μαθηματικά παίζουν πρωτεύοντα ρόλο. Συνήθως είναι πολύ καλά κρυμμένα, όμως, και δεν τα βλέπει κανείς.

Θα πρέπει λοιπόν να τα αποκαλύψουμε και να προσπαθήσουμε να δώσουμε στους φοιτητές μας μια αίσθηση του σπουδαίου ρόλου των μαθηματικών και της ιστορίας τους, για να τους τονώσουμε το ενδιαφέρον για τις σπουδές τους. Παράλληλα, θα πρέπει να κάνουμε το πρόγραμμα σπουδών πιο ευέλικτο έτσι ώστε οι φοιτητές να μπορούν να παίρνουν περισσότερα μαθήματα επιλογής, καθώς και μαθήματα από άλλες επιστήμες. Τα στεγανά μεταξύ τμημάτων της ίδιας Σχολής είναι ένα αποθαρρυντικό φαινόμενο του ελληνικού πανεπιστημίου.

2. Πρέπει όμως να βελτιώσουμε και την καθαυτό μαθηματική εκπαίδευση που παρέχουμε στους φοιτητές μας. Να δώσουμε σημασία στην κατανόηση των βασικών εννοιών και στη χρήση τους και όχι π.χ. στην αποστήθιση αποδείξεων. Να δώσουμε στους φοιτητές μας τα κατάλληλα και τα βασικά εφόδια και εργαλεία που θα τους κάνουν πιο ανταγωνιστικούς στην ελληνική και ευρωπαϊκή αγορά εργασίας, πέρα από την εκπαίδευση. Έχουμε υποχρέωση να το κάνουμε αυτό, γιατί οι φοιτητές μας μιλούν, δυνάμει, την κατ' εξοχήν διεπιστημονική γλώσσα στο σύγχρονο κόσμο, τα μαθηματικά. Νομίζω ότι οι μαθηματικοί, αν έχουν καλή παιδεία, πρέπει κανονικά να είναι περιζήτητοι σε οποιαδήποτε δουλειά: Έχουν αναλυτική ικανότητα, πειθαρχημένη και λογική σκέψη, θέτουν τις σωστές ερωτήσεις, μπορούν να καταλάβουν την ύπαρξη μιας πιο αφηρημένης δομής πίσω από μια συγκεκριμένη, πολύπλοκη τρέχουσα τεχνολογία με τα πολύπλοκα υποσυστήματά της. Στο εξωτερικό, πτυχιούχοι μαθηματικών βρίσκουν αμέσως δουλειά σε επιχειρήσεις και στη βιομηχανία, ενώ σπανίζουν, π.χ. στην Αμερική και στην Αγγλία, πτυχιούχοι μαθηματικοί που είναι διατεθειμένοι να εργασθούν στην εκπαίδευση.

Για τη διδασκαλία των μαθηματικών στη δευτεροβάθμια εκπαίδευση δεν είμαι βέβαια ο πιο κατάλληλος να σας μιλήσει. Απλώς, όπως όλων μας, έχουν περάσει και τα δικά μου παιδιά από τα θρανία του Γυμνασίου και του Λυκείου. Προσπαθώ επίσης να μιλάω όσο μπορώ περισσότερο με συναδέλφους που ασχολούνται με τη Διδακτική των Μαθηματικών στο Πανεπιστήμιο, και παίρνοντας αφορμή απ' αυτές τις εμπειρίες και τις συνομιλίες, θα ήθελα να πω λίγα λόγια.

Στη δευτεροβάθμια εκπαίδευση όλοι οι μαθητές πρέπει κατ' αρχήν ν' αποκτήσουν βασικές γνώσεις και δεξιότητες μαθηματικές, γιατί θα ζήσουν σ' ένα κόσμο στον οποίο οι ποσοτικές σχέσεις θα παίζουν ολοένα και μεγαλύτερο ρόλο. Πρέπει επίσης να μάθουν όχι πώς να

λύνουν ασκήσεις στις εισαγωγικές εξετάσεις, αλλά πώς να σκέφτονται. Οι ασκήσεις ασκούν το μυαλό να βρίσκει διασυνδέσεις και δρόμους από τα δεδομένα στο συμπέρασμα, έτσι ώστε σ' άλλες περιπτώσεις, που δε μας δίνεται το συμπέρασμα, να μπορέσουν να λειτουργήσουν οι μηχανισμοί της κατασκευής των διασυνδέσεων. Επίσης, είναι πολύ-πολύ σημαντικό ν' ασκούνται τα παιδιά περισσότερο στο πώς να αποκρυπτογραφούν και να λύνουν «προβλήματα με λέξεις», δηλαδή προβλήματα διατυπωμένα με ολοκληρωμένες προτάσεις. Τέλος είναι επίσης καλό ν' αντιμετωπίζουν και «ανοιχτά προβλήματα», που δεν είναι, αναγκαστικά, καλώς διατυπωμένα και δεν έχουν πιθανώς μονοσήμαντες απαντήσεις, έτσι ώστε να μπορούν να διατυπώνουν τα ίδια υποθέσεις και να παράγουν αποδεκτές λύσεις, ίσως διαφορετικές από του διπλανού τους.

Θα ήταν καλό να κινηθούμε και στην Ελλάδα και προς μορφές διδασκαλίας όπου ο δάσκαλος δεν αντιμετωπίζει τους μαθητές του μιλώντας στον πίνακα ή από την έδρα, αλλά τους καθοδηγεί με ερωτήματα, παρεμβαίνοντας σε καίρια σημεία, σε διαδικασίες όπου οι μαθητές, συνεργαζόμενοι σε μικρές ομάδες, ανακαλύπτουν μόνοι τους τις λύσεις προβλημάτων, π.χ. της καθημερινής ζωής, που τίθενται σε μαθηματική γλώσσα. Έχω παρακολουθήσει βιντεοταινίες τέτοιων πειραματικών διδασκαλιών, που έχουν οργανώσει ο συνάδελφος Σταύρος Παπασταυρίδης και οι συνεργάτες του, και έχω εντυπωσιασθεί από τ' αποτελέσματα.

Ανακαλύπτοντας τα μαθηματικά, τα παιδιά μαθαίνουν να μην τα φοβούνται, και γίνονται δημιουργικότερα στη σκέψη τους. Μπορούμε επίσης να κεντρίσουμε το ενδιαφέρον τους δείχνοντας τους πώς εφαρμόζονται τα μαθηματικά. Μπορούμε να εκμεταλλευτούμε τη γενικευμένη πια χρήση των υπολογιστών και την εξοικείωση των παιδιών μαζί τους, και να τους εξηγήσουμε ότι κάθε εντολή σ' ένα παιχνίδι στην οθόνη τους απαιτεί πάρα πολλές πράξεις λογικές και αριθμητικές, ότι υπάρχει από πίσω κάποιο πρόγραμμα γραμμένο σε μια λογική γλώσσα, που υλοποιεί αλγορίθμους. Αυτά είναι μαθηματικά. Να τους πούμε ότι σ' ένα τρισδιάστατο παιχνίδι με ωραία γραφικά ή σε μια ταινία κινουμένων σχεδίων όπως το Toy Story, παίζει πρωταρχικό ρόλο η γεωμετρία, η κατασκευή επιφανειών και στερεών. Ότι κάθε φορά που χρησιμοποιούμε την κάρτα μας σε μια αυτόματη ταμιακή μηχανή, ελέγχεται ο κωδικός μας και προστατεύεται ο λογαριασμός μας, και ότι η διαδικασία αποκρυπτογράφησης και ελέγχου έχει σχέση π.χ. με κώδικες, ίσως με την διαιρετότητα και την ανάλυση σε γινόμενο πρώτων παραγόντων.

Όλα αυτά απαιτούν βέβαια ενθουσιασμό και ιδιαίτερη προσπάθεια από τον δάσκαλο και, κυρίως, παίρνουν χρόνο, και αναγκαστικά περιορίζουν την ύλη που μπορεί να διδαχθεί. Δεν πειράζει, αν περιοριστεί η ύλη. Είναι ήδη πολλή. Επίσης, είναι δύσκολο να αξιολογηθούν, με αντικειμενικό τρόπο, με τις εξετάσεις για την εισαγωγή στην τριτοβάθμια εκπαίδευση, όπως γίνονται σήμερα. Τα παιδιά, σήμερα, ασκούνται να κατατάσσουν τα μαθηματικά ερωτήματα (και γρήγορα μάλιστα) σε κατηγορίες διδαγμένων ασκήσεων, που έχουν ενδεχομένως και αποστηθείσει, με στόχο να τις ανασύρουν εύκολα από τη μνήμη τους για να αποδώσουν τα μέγιστα την ημέρα της κρίσεως. Αυτή είναι η περίφημη «ασκησιολογία» ή «μεθοδολογία λύσης των ασκήσεων», το κυριότερο πρόβλημα της εκπαίδευσης στα μαθηματικά στο Λύκειο σήμερα. Και υπαγορεύεται, βέβαια, από τη σημερινή μορφή των εξετάσεων και τις ανάγκες ενός ομοιόμορφου τρόπου βαθμολογίας. Δεν βλέπω άλλη λύση για την πάταξη αυτής της συνταγολογίας από το αδυνάτισμα του ρόλου των εισαγωγικών εξετάσεων και την αντικατάσταση ορισμένων ασκήσεων από πιο σύνθετα προβλήματα. Δεν είμαι όμως σίγουρος αν το εκπαιδευτικό σύστημα - και η ελληνική κοινωνία - είμαστε ακόμα ώριμοι για μια τέτοια μετεξέλιξη.

Εν τω μεταξύ θα πρέπει εμείς στα πανεπιστήμια να αντιμετωπίσουμε πρακτικά το πρόβλημα των αποτελεσμάτων της «ασκησιολογίας» στο πρώτο έτος και να δώσουμε μεγάλη προσοχή στο πώς θα εισαγάγουμε τους νέους φοιτητές στα μαθηματικά. Πώς θα καλύψουμε τα κενά των γνώσεών τους, και το κυριότερο, πώς θα τους βοηθήσουμε να γεφυρώσουν την οδυνηρή ασυνέχεια από τις ασκήσεις της προετοιμασίας για τις εξετάσεις στην κατανόηση των εννοιών των μαθηματικών, την ιστορία τους και τη χρήση τους με ακρίβεια, αυστηρότητα, αλλά και αποτελεσματικότητα. Αυτό είναι δική μας δουλειά και δεν ωφελεί να διαμαρτυρόμαστε για το επίπεδο των πρωτοετών. Θα πρέπει να προσαρμοστούμε και ν' αντιμετωπίσουμε αυτό ακριβώς το επίπεδο που υπάρχει σήμερα, ελαττώνοντας π.χ. την ύλη που διδάσκουμε, για να βρούμε καιρό για τα βασικά.

Κύριε Πρόεδρε,

Κυρίες και Κύριοι:

Σας κούρασα και τελειώνω. Σίγουρα η τέταρτη αρχή της διδασκαλίας, την οποία έχω παραβεί, πρέπει να είναι να μην υπερβαίνει κανείς την ώρα του.

Στα «Ταξίδια του Gulliver» ο Swift αναφέρει μία χώρα, όπου οι μαθητές μαθαίνουν τα μαθηματικά δια του πεπτικού συστήματος γράφοντας τα θεωρήματα και τις αποδείξεις σε μικρά χαρτάκια, τα οποία καταπίνουν. Νηστεύουν μετά για τρεις μέρες, και τα μαθηματικά μεταφέρονται στο μυαλό, όπου παραμένουν ανεξίτηλα. (Επί τη ευκαιρία, έχω δει πολλά τέτοια χαρτάκια στα αμφιθέατρα στις εξετάσεις, αλλά αμφιβάλω αν το περιεχόμενό τους πήγε ποτέ στο μυαλό των συγγραφέων τους). Παρ' όλες αυτές τις τεχνικές εκμάθησης, δεν γίνεται βέβαια εκπαίδευση χωρίς δασκάλους. Τί κάνει ο δάσκαλος; Βοηθάει τους μαθητές να μαθαίνουν μόνοι τους. Μερικές φορές σκέφτεται μεγάλωφωνα και τους διδάσκει συλλογισμούς και τρόπους αντιμετώπισης νέων ερωτημάτων. Τους δείχνει πώς να διαβάζουν μαθηματικά και πώς να καταλαβαίνουν τι λέει και τι δεν λέει το μαθηματικό κείμενο. Τους μεταδίδει τον ενθουσιασμό του για το αντικείμενο και την αγάπη για τη μάθηση. Δίνει το παράδειγμα πώς σκέφτεται και πώς δρα ένας μορφωμένος άνθρωπος. Πολλές φορές, χωρίς ίσως να το αντιλαμβάνεται, γίνεται οδηγός ζωής.

Σχετικά με το τελευταίο, θα ήθελα να κλείσω με μια ιστορία. Στο Πανεπιστήμιο Κρήτης είχα την τύχη να γνωρίσω ένα μεγάλο Έλληνα μαθηματικό της εποχής μας, τον αείμνηστο Στέλιο Πηχωρίδη, που μας άφησε, τόσο νωρίς και τόσο ξαφνικά, πριν από μερικά χρόνια. Ο Πηχωρίδης μιλούσε συνεχώς για τον καθηγητή του των Μαθηματικών στο Πολυτεχνείο, τον Νικόλαο Κριτικό, ένα μεγάλο δάσκαλο με σπάνια προσωπικότητα και ήθος. Μια μέρα, σχολιάζοντας το περίφημο «ένα και μοναδικό» σύγγραμμα, ο Πηχωρίδης έλεγε ότι ο Κριτικός πρότεινε πάντα στα μαθήματά του στους πρωτοετείς φοιτητές ξένη βιβλιογραφία. Μου έδειξε μάλιστα ένα απόκομμα από ένα άρθρο του Αλέξανδρου Αργυρίου στο «Βήμα», το οποίο θα ήθελα να σας διαβάσω. Ο Αργυρίου, που είχε επίσης, φαίνεται, δάσκαλο στο Πολυτεχνείο τον Κριτικό, περιγράφει πώς, ενώ ο Κριτικός έδινε ξένη βιβλιογραφία,

«Ένας από τους φοιτητές, με την προπέτεια που είχαμε στα δεκαοχτώ μας χρόνια, του ζήτησε βιβλιογραφία στα Πορτογαλικά. Ο Κριτικός, χωρίς να ενοχληθεί, χωρίς να δείξει απορημένος ή να αμφισβητήσει τις πορτογαλικές γνώσεις του μαθητή του, ζήτησε προθεσμία λίγων ημερών και τελικά του έδωσε. Όταν πολύ αργότερα αναλογιζόμουν το επεισόδιο αυτό, δεν μπορούσα να καταλήξω αν ήταν ένα μικρό μάθημα ήθους, ή αν έδειχνε την ευγένεια ενός δασκάλου που δεν επέτρεπε στον εαυτό του να υποπτευθεί την ειλικρίνεια έστω και ενός νεαρού μαθητή του».

Νομίζω ότι δεν υπάρχει αμφιβολία ότι ήταν το δεύτερο. Ο δάσκαλος δεν επέτρεπε στον εαυτό του, έστω και για μια στιγμή, να υποπτευθεί την ειλικρίνεια, την καλή πρόθεση, έστω και ενός νεαρού μαθητή του.

Σας ευχαριστώ πολύ.

Βασίλειος Α. Δουγαλής

Πηγές-Βοηθήματα:

1. Πρόγραμμα ΕΠΕΑΕΚ-Ενέργεια 3.1.α «Μαθηματικά για το 2001-Αναμόρφωση και αναβάθμιση των μαθηματικών σπουδών στην Ελλάδα» (Συνεργασία Τμημάτων Μαθηματικών Πανεπιστημίων Αθηνών, Ιωαννίνων και Κρήτης, Επιστημονικός Υπεύθυνος Χ. Κουρουγιώτης): (α) Έκθεση επιτροπής αξιολόγησης των προγραμμάτων σπουδών, (β) Έρευνα για την απασχόληση πτυχιούχων Μαθηματικών.
2. Γ. Δάσιος, «Ο ρόλος των Μαθηματικών στην κοινωνία και των μαθηματικών στην τάξη», Ομιλία στο 16^ο Συνέδριο Μαθηματικής Παιδείας της Ελληνικής Μαθηματικής Εταιρείας, Λάρισα 1999.
3. Σ.Παπασταυρίδης, «Τα μαθηματικά (όπως τα διδάσκουμε) χρησιμεύουν άραγε σε τίποτε; (Εκτός βέβαια από τις γενικές εξετάσεις ;)», *ibid.*
4. M. Artigue, “Teaching Analysis in senior secondary schools: What challenges, what perspectives at the beginning of the 21st century”. Ομιλία στο 17^ο Συνέδριο Μαθηματικής Παιδείας της Ελληνικής Μαθηματικής Εταιρείας, Αθήνα 2000.
5. M. Artigue, “The teaching and learning of mathematics at the University level”, *Notices of the AMS*, Dec. 1999, p.1377 *et seq.*
6. S.G. Crantz, “Imminent danger- from a distance”, *ibid.*, May 2000, p.533.
7. E.E. David, Jr. *et al.*, “Renewing U.S. Mathematics: Critical resource for the future”, *ibid.*, v. 31 (1984), p.435 *et seq.*
8. SIAM Report on Mathematics in Industry, SIAM, Philadelphia 1994.
9. M. Wright and A. Chorin, “Mathematics and Science”, NSF Division of Math. Sciences Rept., 1999.